Tehnička škola “Mihajlo Pupin”
Bijeljina

Određeni integral i primjene određenog integrala

Određeni integral

Kao što znamo, neodređeni integral $\int f(x)dx$ predstavlja jednu novu funkciju - takozvanu primitivnu funkciju date funkcije $y = f(x)$. Određeni integral funkcije $y = f(x)$ po intervalu $[a,b]$, koga označavamo sa

$$\int_a^b f(x)dx$$

je jedan novi broj koga definišemo na sledeći način

Određeni integral

Kao prvo, za svaki realan broj $\lambda > 0$, dati interval [a,b] možemo pokriti pod-intervalima

$[x_{k-1}, x_k]$ čija je dužina manja od datog broja

$\lambda > 0$, odnosno

$$\max_{1 \le k \le n}(x_k - x_{k-1}) \le \lambda$$

Pri tome broj takvih podintervala je sve veći što je λ manji i označavamo ga $n = n(\lambda)$. Prema ovome za dato λ imamo da je:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, $n = n(\lambda)$.

Određeni integral

Isto tako, unutar svakog pod-intervala $[x_{k-1}, x_k]$ možemo izabrati bilo koju tačku, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ odnosno imamo da je:

$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 < \dots < x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$,

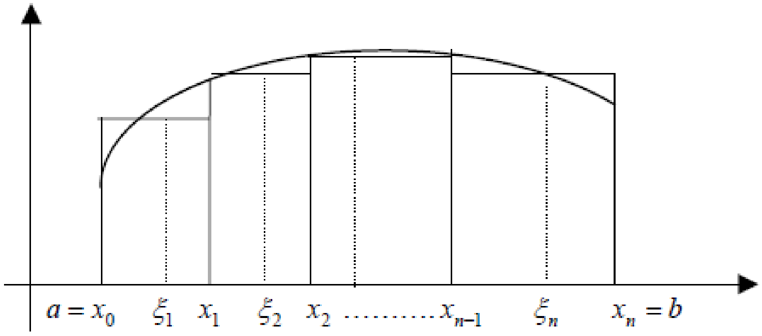
$n = n(\lambda)$.

Tada integral funkcije $y = f(x)$ po intervalu $[a,b]$ definišemo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n(\lambda)} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Određeni integral

Da bi shvatili broj na desnoj strani u ovoj definiciji , potrebno je grafički prikazati podintegralnu funkciju zajedno sa prethodno opisanom subdivizijom intervala [*a*,*b*] :



Određeni integral

Nije teško primjetiti da broj $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ predstavlja površinu pravougaonika sa stranicama $[x_{k-1}, x_k] \subseteq O_x$ i $[0, f(\xi_k)] \subset O_y$. Prema slici to znači da za veliki broj podintervala važi da je broj

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

približno jednak površini lika ispod grafika funkcije $y = f(x)$. Zbog toga kažemo da je

$$\int_a^b f(x)dx$$

površina "krivolinijskog trapeza" koji je ograničen odozdo sa osom Ox ,

Određeni integral

odozgo sa grafikom funkcije $y = f(x)$ (uz pretpostavku da je $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$), te pravama $x = a$ sa lijeve strane i $x = b$ sa desne strane.

Ovakvu konstrukciju je prvi koristio Isac Newton.

Njutn-Lajbnicova formula:

Teorema . Neka je funkcija $y = f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b]$, te neka je $y = F(x)$ antiderivacija funkcije $y = f(x)$, odnosno $F(x) = \int f(x)dx$. Tada određeni integral po intervalu $[a,b]$ efektivno računamo po formuli:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Njutn-Lajbnicova formula:

$$\int_0^1 (x^2 - 3x + 4)dx = \left| \int (x^2 - 3x + 4)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right| = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= (\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4) - (\frac{0}{3} - \frac{3}{2} \cdot 0 + 4 \cdot 0) = -\frac{7}{6} + 4 = \frac{17}{6}.$$

$$\int_1^2 \frac{x-4}{x^3}dx = \left| \int \frac{x-4}{x^3}dx = \int \frac{1}{x^2}dx - 4\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right| = \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= (-\frac{1}{2} + \frac{2}{4}) - (-\frac{1}{1} + \frac{2}{1}) = -1.$$

Njutn-Lajbnicova formula:

$$\int_0^{\pi/6}(2\cos x-5\sin x)dx=\left|\int(2\cos x-5\sin x)dx=2\sin x+5\cos x\right|=\left(2\sin x+5\cos x\right)\Big|_0^{\pi/6}=$$

$$=(2\sin\frac{\pi}{6}+5\cos\frac{\pi}{6})-(2\sin 0+5\cos 0)=2\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-5=-4+\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

$$\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\Big|_0^{\pi/4}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg} 0=1-0=0.$$

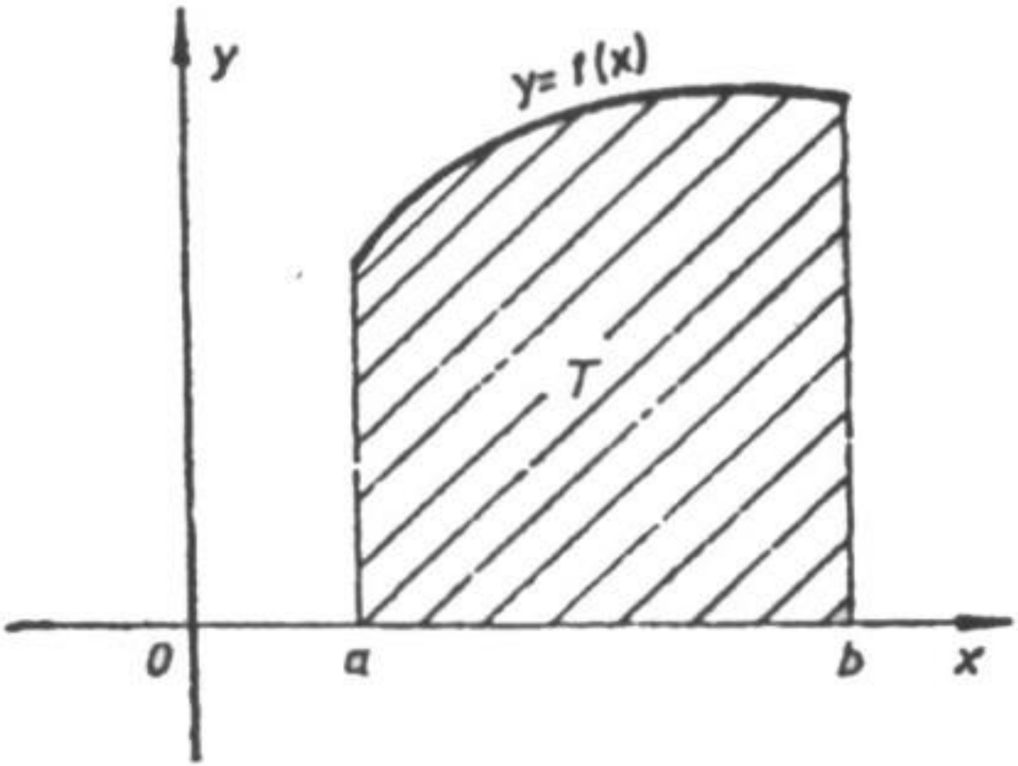
Neke primjene određenog integrala:

- Izračunavanje površine ravne figure
- Izračunavanje zapremine rotacionih tijela
- Izračunavanje dužine luka krive

Površina:

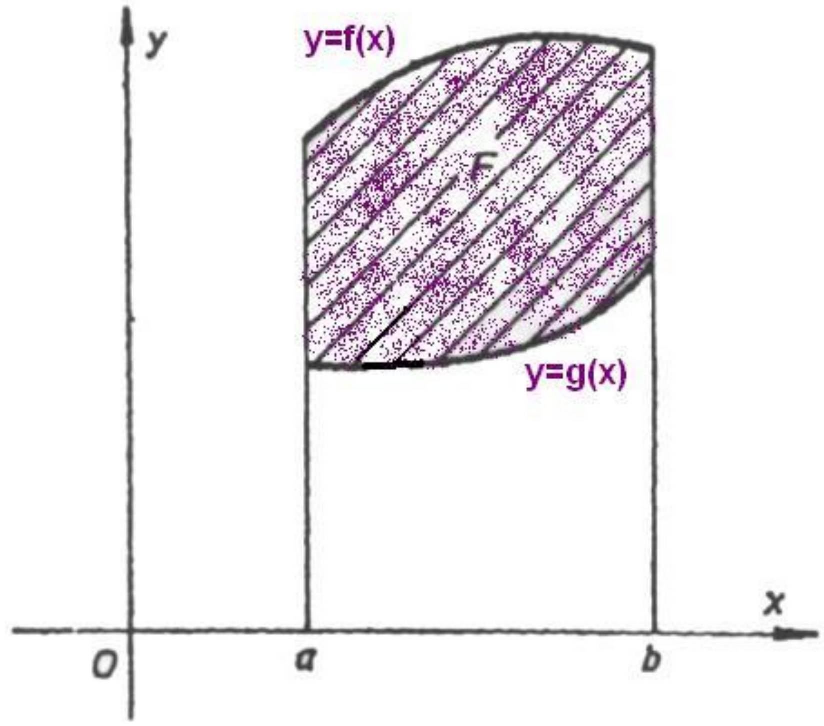
- **Teorema1**. Neka je funkcija f(x) definisana i neprekidna na segmentu [a,b] i neka je f(x)≥0 za svako x iz tog segmenta. Tada je površina krivolinijskog trapeza ispod krive y=f(x) nad segmentom [a,b] jednaka:

$$P = \int_a^b f(x)dx$$



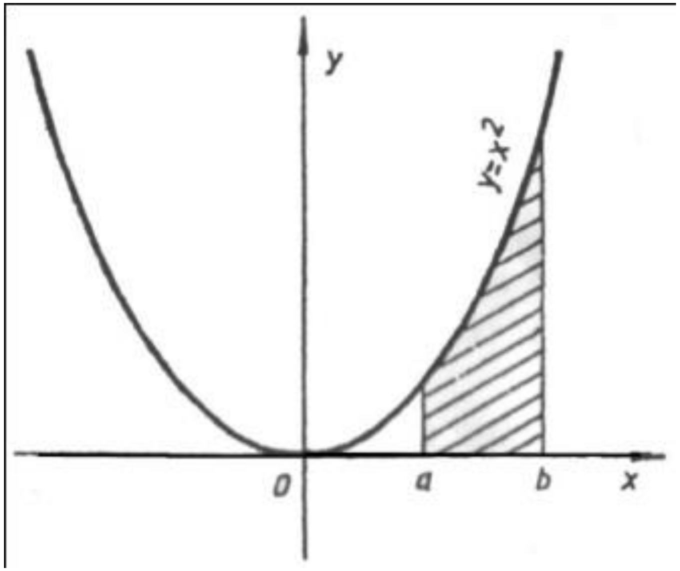
- NAPOMENA: ukoliko je funkcija negativna potrebno je izračunati apsolutnu vrednost odgovarajućeg integrala!

… ukoliko je figura ograničena sa dve krive :



$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

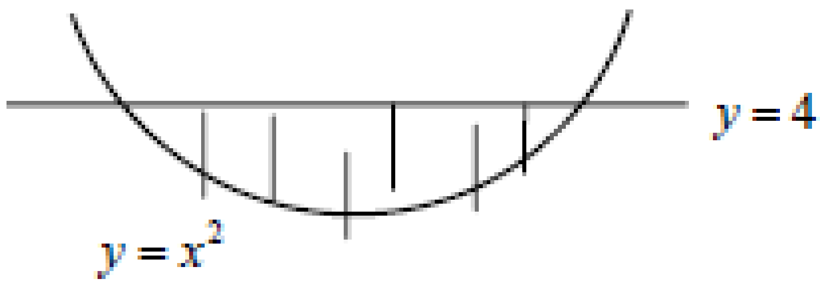
Primjer1:Izračunati površinu figure ograničene parabolom $y=x^2$, x-osom i pravama x=a i x=b.



$$P=\int_a^b x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

Primjer2.

Izračunati površinu figure ograničene krivim linijama $y=4$ i $y=x^2$.



- izračunati presječne tačke od $y = 4$ i $y = x^2$:

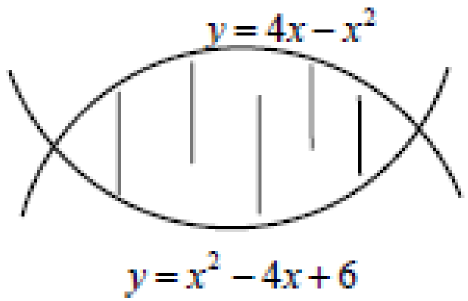
$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$;

- odrediti lijevo i desno po x: $a = -2$ i $b = 2$;
- odrediti gore i dole po y: $f(x) = x^2$ i $g(x) = 4$;
- računanje površine:

$$P=\int_a^b (g(x)-f(x))dx=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\left(4x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{32}{3}.$$

Primjer3.

Izračunati površinu figure omeđene krivim $y=4x-x^2$ i $y=x^2 - 4x+6$.



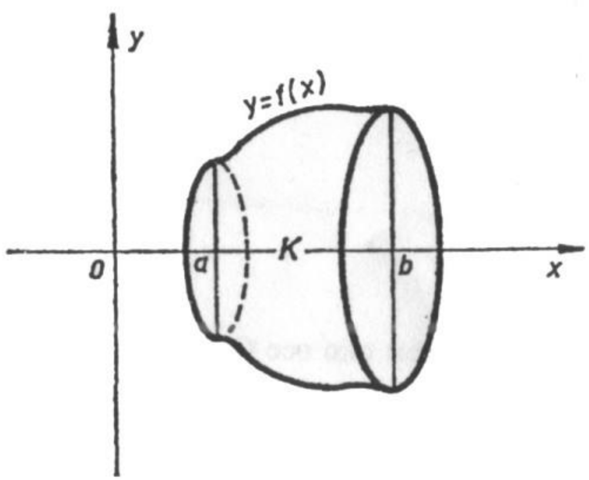
- izračunati presječne tačke od $y = 4x - x^2$ i $y = x^2 - 4x + 6$: $4x - x^2 = x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow$ $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x_1=1$, $x_2=3$
- odrediti lijevo i desno po x: $a =1$ i $b = 3$;
- odrediti gore i dole po y: $f (x) = x^2 - 4x + 6$ i $g(x) = 4x - x^2$;

Izračunanje površine:

$$P=\int_a^b (g(x)-f(x))dx=\int_1^3 [(4x-x^2)-(x^2-4x+6)]dx=(4x^2-\frac{2}{3}x^3-6x)\Big|_1^3=\frac{8}{3}.$$

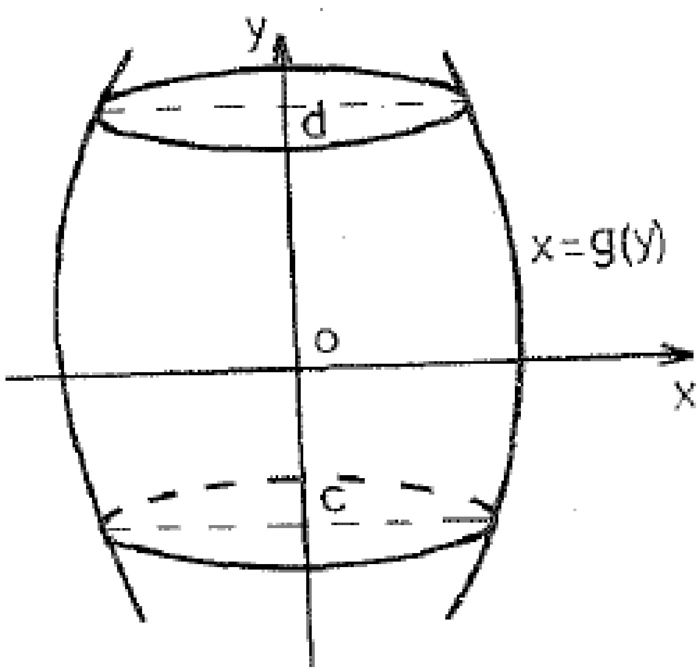
Zapremina:

Teorema. Neka je funkcija f definisana i neprekidna na segmentu [a,b] i neka je funkcija pozitivna. Tada je zapremina obrtnog tjela K koje nastaje obrtanjem oko x-ose f-je y=f(x) nad segmentom [a,b] jednaka



$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

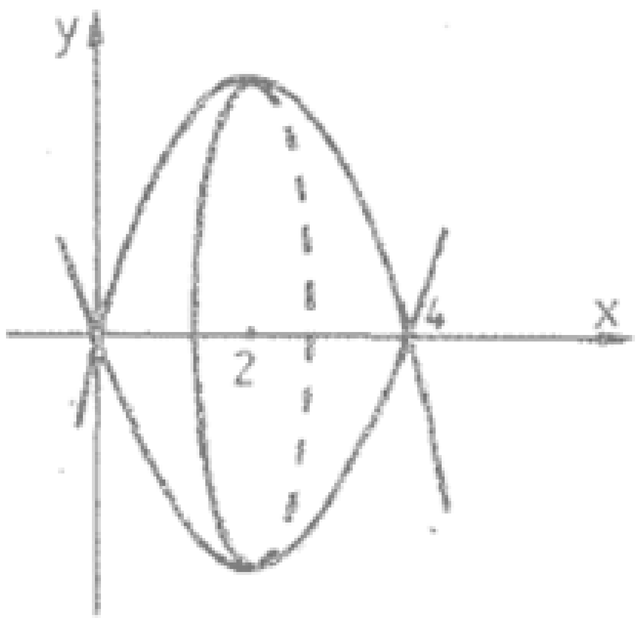
Teorema. Neka je funkcija f definisana i neprekidna na segmentu [c,d]. Tada je zapremina obrtnog tjela K koje nastaje obrtanjem oko y-ose f-je x=g(y) nad segmentom [c,d] jednaka



$$V = \pi \int_{c}^{d} x^2 dy$$

Primje4.

Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko ose Ox dijela površi ograničenog lukom krive $y = 4x - x^2$ i osom Ox.

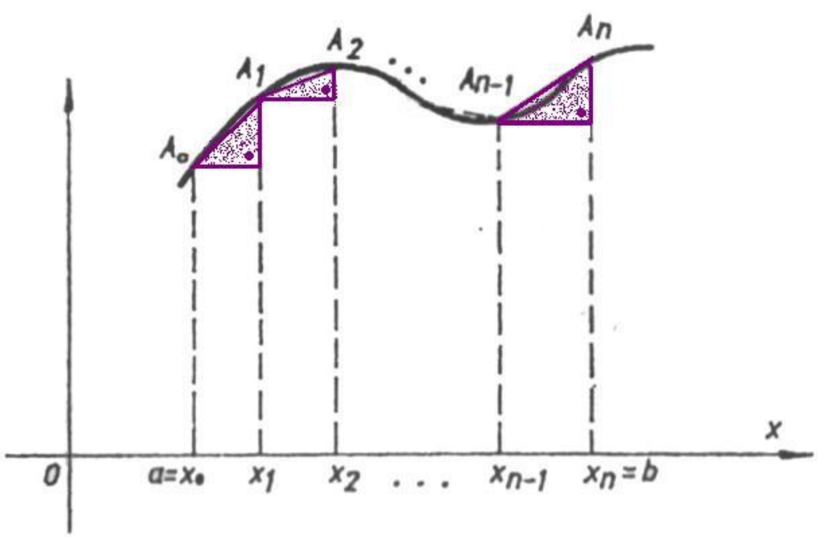


$$V=\pi\int_0^4(4x-x^2)^2\,dx=\pi\int_0^4(16x^2-8x^3+x^4)dx=$$

$$=\pi\left(16\frac{x^3}{3}-2x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^4=\frac{512}{15}\pi$$

Dužina luka:

Teorema. Neka je u ravni Oxy zadata kriva y=f(x), gde je funkcija f neprekidna i ima neprekidan izvod na segmentu [a,b]. Dužina luka krive od tačke sa apcisom a do tačke sa apcisom b iznosi:



$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Primjer6.

Izračunati dužinu luka krive y od koordinatnog početka do tačke A.

$$y=\frac{2}{3}x^{3/2}$$

$$A\left(8,\frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$l=\int_0^8\sqrt{1+\left(x^{1/2}\right)^2}\,dx=\int_0^8\sqrt{1+x}\,dx$$

$$=\int_0^8(1+x)^{1/2}\,dx=\left.\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\right|_0^8=\frac{52}{3}$$

Zadaća

1. Određeni integrali - zbirka 845-861
2. Površine - zbirka 900-918
3. Zapremine - zbirka 968-988
4. Dužina luka - zbirka 1008-1020